单元 2： 二阶微分方程及其应用

特定目标：

1. 学习解某些特定二阶微分方程技巧。
2. 在实际的情况下应用有关建立及解二阶微分方程的技巧。
3. 能够理解二阶微分方程的解。

内容	时间分配	教学建议
2.1 分类	2	此部分是一阶微分方程的延续，主要着重研究下列的方程： $$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+q(x)y=f(x)$$ 教师应详加陈述这类方程的特点 (如 y 及其导数为线性，而 p、q 及 f 则为 x 的函数)，并应提供足够例子予学生，帮助他们分辨不同类别的微分方程如齐次线性方程 ($f(x)=0$)，非齐吹线性方程 ($f(x)\neq 0$) 及非线性方程 (不能写成上述形式的方程)。 在此阶段，教师可介绍一些二阶微分方程的现实生活例子，如系于弹簧的物体的振动，在引力及与速度成正比的阻力作用下的自由下坠运动，及最佳存货水平之定价方针等问题。
2.2 迭合原理	2	此原理可用一具体例子说明。例如，让学生证明 $y=x$ 及 $y=x^2$ 是 $x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=0$ 的解，然后继续证明 $y=3x+4x^2$ 亦为方程的解。尝试几个例子后，教师可引导学生证明迭合原理；但对能力稍逊的学生，则可删去证明部分。教师可省略线性齐次方程的解是线性独立之原理。教师可以用例子引出迭合原理并不适用于非齐次线性方程及非线性的方程，例如在 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+y=1$ 的方程中，$y=1+\sin x$ 及 $y=1+\cos x$ 是方程的解，但 $y=3(1+\sin x)$ 及 $y=(1+\sin x)+2(1+\cos x)$ 皆不是方程的解。学生应从此例子清楚知道迭合原理只适用于齐次线性的微分方程。

内容	时间分配	教学建议
2.3 常系数齐次方程 $a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=0$ **的解**	4	此处只要求学生利用辅助方程 (或特征方程) 求此类方程的解，其它方法并不需要。 教师可与学生讨论所产生的三种不同结果，即辅助方程有两相异实根，两相同实根，及两复共轭根。对于后者，若根是 $u\pm vi$，则设 $y = ze^{ux}$，代入，方程可简化为 $\frac{d^2z}{dx^2}+v^2z=0$，明显地，$z=\cos vx$ 及 $z=\sin vx$ 是新方程的解，从迭合原理可得 $z=c_1\cos vx+c_2\sin vx$ 为方程之通解；代入 $z = ye^{-ux}$ 于上式后，可得出原方程式的解为 $z=(c_1\cos vx+c_2\sin vx)e^{ux}$。对能力较高的学生，教师可用值等式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 证明上述结果。 此部分对以后的学习很重要，所以教师应给予学生充份的练习，使其熟练地掌握求解此类方程的技巧。现实生活的应用可留至 2.7 节。
2.4 常系数非齐次方程 $a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy = f(x)$ **的解** (a) 余函数与特别积分	6	教师应清楚解释以下之定理： 非齐次线性微分方程的通解是约简的齐次方程 (即置 $f(x)=0$) 的通解及该非齐次方程的特解之和。 教师应对学生强调，为了避免混乱，一般称约简方程的通解为「余函数」面称非齐次方程的特解为「特别积分」，所以，对非齐次方程来说 通解 = 余函数 + 特别积分 此定理之证明，可留给学生当作练习。

内容	时间分配	教学建议
(b) 待定系数法		学生只须用待定系数法求特别积分，而不须用逆算子法。 教师可利用下表帮助学生记忆多种特别积分 $y_p(x)$ 的试用形式。

函数 $f(x)$	$y_p(x)$ 的试用形式	
x^n	$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$	(0)
e^{px}	Ae^{px}	(p)
$c\cos px$ $c\sin px$ $c_1\cos px+c_2\sin px$	$A\cos px+B\sin px$	(ip)

但是教师应提醒学生若上表中括号内之数字是辅助方程的重数为 k 的根 $(k=1$ 或 $2)$，则 $y_p(x)$ 的试用形式应为 x^k 倍相对的形式。下列的例子可清楚解释上述重点。

例一

设 $\frac{d^2y}{dx^2}+9y=\cos 2x$，则辅助方程之根为 $\pm 3i$，故余函数为 $y_c=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x$。因为 $2i$ 不是辅助方程的根，所以特别积分的试用式是 $y_p=A\cos 2x+B\sin 2x$。但是，对方程 $\frac{d^2y}{dx^2}+9y=\cos 3x$，余函数不变，但因 $3i$ 是辅助方程之根，故此特别积分的试用式应是 $y_p=x(A\cos 3x+B\sin 3x)$。在上述两种情况，学生应清楚知道他们必须将 $y_p(x)$ 代入方程方可得出 A 和 B 之值。

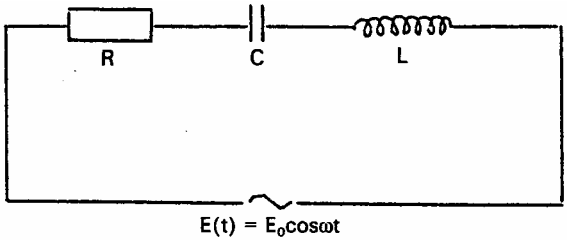
例二

设方程 $\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}=x^2$，因 0 是辅助方程的其中一根（另一根为 -2），故特别积分应试

内容	时间分配	教学建议
		$y_p = x(a+Bx+Cx^2)$，同样地，可将 $y_p(x)$ 代入方程计算出 A，B 和 C 的值。 如果函数 $f(x)$ 是几个不同类型的函数的线性组合，则学生求此类方程的解时可能有困难，故此，教师应提供一些例子加以说明。 *例三* 设方程 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=4x+e^{3x}$，辅助方程的根是 1 和 2。因 0 和 3 不是辅助方程的根，所以尝试 $y_p = A_0+A_1x+Be^{3x}$。教师应指出 A_0+A_1x 是相对 $4x$ 的特解，而 Be^{3x} 是相对 e^{3x} 的特解。但是，若方程是 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=4x+e^{x}$，则因为 1 (1 是 e^x 的指数 x 的系数) 是辅助方程的根，$y_p(x)$ 的试用形式应是 $$y_p = \underbrace{A_0+A_1x}_{\text{相对 } 4x}+\underbrace{Bxe^x}_{\text{相对 } e^x}$$ 为求保证学生能熟习解决现实生活难题的实际步骤，教师应给予学生充份的初值或边界值问题。
2.5 将方程约简为常系数的二阶微分方程	3	学生可将指定的公式代入微分方程并将之简化。例如， 1. 代入 $x=e^z$ 可将方程 $x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=0$ 简化为 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}z^2}+y=0$，但老师应提醒学生 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}z^2}\neq\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\cdot\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}z^2}$。

内容	时间分配	教学建议
		2. 代入 $y=\frac{z}{x^2}$ 可将方程 $x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+2x(x+2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2(x+1)^2y=e^{-x}$ 简化为 $\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}+2\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+2z=e^{-x}$。 在此类例子中，教师应对学生强调下列公式： $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ 及 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\cdot\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\right]$ $=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\cdot\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}z^2}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$
2.6 一阶微分方程组	3	这里只须考虑可利用消去法化为二阶线性微分方程的简单方程组；例如，方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-x=t$ 及 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+y=t^2$ 可化简为 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+y=1+t^2$，而方程 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x-3y$ 及 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y-3x$ 则可化简为 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-8x=0$。
2.7 实际的应用	8	在现实生活中，有很多例子可运用二阶微分方程去解决。教师应与学生讨论如何去理解此类问题的解。下列是一些例子。 1. *商品的定价方针* 以下是某公司对其所生产的商品的定价方针。 $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=-k\left(L(t)-L_0\right)$

内容	时间分配	教学建议
		$\frac{dL}{dt}=Q(t)-S(t)$ $S(t)=500-40P-10\frac{dP}{dt}$ $Q(t)=250-5P$ 其中 $P(t)$ = 商品价格 $S(t)$ = 预测销量 $Q(t)$ = 生产水平 $L(t)$ = 存货水平 L_0 = 最佳水平 k = 正常数 利用微分法，学生不难获得 $\frac{d^2P}{dt^2}=-k\frac{dL}{dt}=-k\left(Q(t)-S(t)\right)$ $=-k(-250+35P+10\frac{dP}{dt})$ 或 $\frac{d^2P}{dt^2}+10k\frac{dP}{dt}+35kP=250k$ 2. *两国人口增长问题* 设二国 A 和 B 的自然人口增长率为每年 λ%，每年移民率也 A 国至 B 国的是 a%而 B 国至 A 国的则是 b%。若该二国之原本人口个数分别为 N_1 及 N_2 则 t 年之后，该二国的人口个数 (分别以 $x(t)$ 及 $y(t)$ 表示) 可由 $\frac{dx}{dt}=\frac{\lambda x}{100}-\frac{ax}{100}+\frac{by}{100}$ 及 $\frac{dy}{dt}=\frac{\lambda y}{100}-\frac{by}{100}+\frac{ax}{100}$ 求得。 (此组方程可简化为二阶微分方程。) 3. *化学反应* 在一化学反应中，原有 2 kg 的物质 X 及 4 kg 的物质 Y。当时间位 t 时，有 x kg 的物质 X 及 y kg 的物质 Y 存在，其中变量 x 及 y 满足方程 $\frac{dx}{dt}=-x^2y$，$\frac{dy}{dt}=-xy^2$。试求 $\frac{dy}{dx}$ ，答案以 x 及 y 表示，同时以 x 表示 y。 由此，求一以 x 及 t 组成的微分方程，同时以 t 表示 x。 4. *物质冷却* 若一为 y 度的物质存放于某房间 t 分钟后，其关系满足微分方程

内容	时间分配	教学建议
		$3\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}=0$。试用 $z=\frac{dy}{dt}$ 代入，或用其它方法，求 y，答案以 t 表示，已知当 $t=0, y=60$ 及当 $t=6\ln 4$，$y=35$。 试问何时物质的冷却率会每分钟低于一度，答案须准确至分钟计算。那时，该物质的温度为何? 5. *电荷消耗* 一带电荷 Q 库仑的物质每秒钟电荷的消耗率为 kQ 库仑，其中 k 为常数。试写出 Q 与 t 的微分方程，其中 t 代表该物质放电 t 秒后的时间。1 若起初的电荷为 Q_0 库仑，求该方程的解。若 $Q_0=0.001$ 及 $t=10$，$Q=0.0005$ 。当 $t=20$，试求 Q 之值。 6. *电路* 若学生已学习电感及电容的概念，教师可引用有关电路的例子来增加他们的兴趣。众多有关方程中其中一则是 $L\frac{d^2\ell}{dt^2}+R\frac{d\ell}{dt}+\frac{1}{C}\ell=E_0\omega\cos\omega t$ 其中 R、C 及 L 串联。 
	28	